

# 测量点集的简化及其隐式曲面重建误差分析

王宏涛 张丽艳 杜 佶 李忠文 周儒荣

(南京航空航天大学 CAD/CAM 工程研究中心, 南京 210016)

**摘要** 基于测量点集的模型重建是逆向工程中的关键环节,为提高模型重建精度和重建效率、保证为模型重建提供必需的信息,简化测量点集、分析重建误差是十分必要的。首先实现了一种测量点集的快速简化算法,然后提出了采用紧支撑径向基函数建立简化后点集的隐式曲面方程,从而实现重建误差分析的方法。实例结果表明,本文简化算法效率较高、效果良好,运用隐式曲面实现的重建误差分析为简化测量点集提供了误差依据。

**关键词** 点集简化 隐式曲面重建 紧支撑径向基函数 误差分析

中图分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)11-2114-05

## Simplification and Error Analysis Based on Implicit Surface for Measuring Point-sets

WANG Hong-tao, ZHANG Li-yan, DU Ji, LI Zhong-wen, ZHOU Ru-rong

(Research Center of CAD/CAM Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)

**Abstract** The model reconstruction based on measuring point-sets is a key step in the reverse engineering, it is quite necessary to simplify the measuring point-sets and analyze the reconstruction error in order to improve the reconstruction precision and the reconstruction efficiency and provide essential information for the model reconstruction. In this paper, a new simplification algorithm for measuring point-sets is realized firstly, and then a novel method for reconstruction error analysis where the simplified point-set is fitted by an implicit surface based on compactly supported radial basis function is presented. The experimental results show that the simplification algorithm has higher efficiency and better effect, the error analysis results based on implicit surface can restrict simplification quantity within the limitation of reconstruction precision.

**Keywords** point-sets simplification, implicit surface reconstruction, compactly supported radial basis function, error analysis

## 1 引言

基于测量数据的模型重建是逆向工程中的关键环节,过分密集的测量数据有时不仅不会提高模型重建的精度,而且会严重影响模型重建等后续处理的效率,因此在保证能为模型重建提供必需信息的前提下,简化测量数据点集、分析重建误差是十分必要的。许多学者对点集的简化问题展开了研究,张等人<sup>[1]</sup>在用 Riemann 图建立数据点间邻接关系的基础上,提出了按给定数据点个数、数据点间距离及数据

点法向精度等 3 种简化海量数据的准则<sup>[1]</sup>;Weir 等人首先将数据点集的最小包围盒分成若干大小相等的立方体,然后在每个含点立方体内保留一个与立方体中心最近的数据点,实现了点集的简化<sup>[2]</sup>;Sun 等人对上述算法进行了改进,实现了立方体的优化划分<sup>[3]</sup>;Liu 等人运用一张参考平面,根据给定误差将点集递归地划分成若干区域,在每一区域保留特征点,运用数字图像压缩技术实现了点集的简化<sup>[4]</sup>;Pauly 等人<sup>[5]</sup>和 Mederos 等人运用聚类方法实现了数据点集的快速递归划分,并运用移动最小二乘 (moving least squares, MLS) 法实现了点集的简

基金项目:霍英东教育基金会第九届高校青年教师基金(03-91053)

收稿日期:2006-03-10;改回日期:2006-05-19

第一作者简介:王宏涛(1968~),女,副教授。南京航空航天大学机电学院获博士学位。主要研究方向为反求工程、CAD/CAM 技术、测控技术。发表学术论文 10 余篇。E-mail: mechtwang@nuaa.edu.cn

化<sup>[5,6]</sup>。对点集重建后得到的曲面进行误差分析,目前常规的定量方法是计算测量数据点距曲面的欧氏距离<sup>[7]</sup>,通过距离数值的大小来评判重建曲面的精度质量。

本文借鉴上述测量点集简化算法,实现了一种测量数据点集的简化算法,并提出一种新的重建误差分析方法,该方法使用紧支撑径向基函数(compactly supported radial basis function, CSRBF)实现简化后点集的隐式曲面重建,运用隐式曲面方程对重建误差进行定量分析。

## 2 测量点集的简化

分析前述的各种点集简化方法,可以把这些方法分成两种,一种是使简化后的数据点均是原始点集中的点<sup>[1-4]</sup>;一种是采用 MLS 投影使简化后的数据点不再是原始点集中的点<sup>[5,6]</sup>。本文综合这两种方法的长处,运用后者方法,根据点数和表面变化系数实现测量数据的快速递归分块;借鉴前者方法,在每个分块子集内保留一个与该子集重心点最近的测量点实现数据简化,以保证简化后的数据点均是原始点集中的点。

设  $P_j(j=1,2,\dots,m)$  为原始测量点集  $P=\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  的任一子集,  $p_i(i=1,2,\dots,n)$  为点集  $P_j$  中的数据点,则点集  $P_j$  的协方差矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} p_1 - \bar{p}_j & p_2 - \bar{p}_j & \vdots & p_n - \bar{p}_j \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 - \bar{p}_j \\ p_2 - \bar{p}_j \\ \vdots \\ p_n - \bar{p}_j \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中,  $\bar{p}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$  为点集  $P_j$  的重心。该协方差矩阵是一个  $n \times n$  的半正定矩阵,存在 3 个实数特征值,设其分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (假设  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$ ),它们对应的特征向量分别为  $v_1, v_2, v_3$ ,则由  $v_2$  和  $v_3$  所张成的平面为点集  $P_j$  的最小二乘拟合平面  $T_j$ ,  $v_1$  即为  $T_j$  的法矢方向,  $\lambda_1$  的大小表明了点集  $P_j$  所确定的部分重建曲面  $S(P_j)$  的曲率在  $T_j$  附近的变化情况,定义  $S(P_j)$  的表面变化系数为

$$\alpha = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (0 < \alpha < \frac{1}{3}) \quad (2)$$

由用户预先设定一个  $\alpha$  的阈值及每个子集的点数  $n$ ,设通过测量数据点集的重心为  $\bar{p}_j$ ,以  $v_3$  为法向量的平面为  $T_j(\bar{p}_j, v_3)$ ,用  $T_j(\bar{p}_j, v_3)$  对点集进行

递归地分块,直到子集的  $\alpha$  值或点数  $n$  小于所设定的阈值,这样将原始测量点集分成满足上述条件的若干个小子集,实现了数据分块。

对由原始测量点集  $P$  得到的若干测量数据子集  $P_j(j=1,2,\dots,m)$ ,计算每个子集  $P_j$  的重心  $\bar{p}_j$  与子集  $P_j$  中的每个测量点  $p_i(i=1,2,\dots,n)$  的欧氏距离,保留其中与重心  $\bar{p}_j$  最近的测量点加入简化后的点集,实现原始测量点集的简化。

## 3 基于 CSRBF 的隐式曲面重建

Turk 等人介绍了两类重要的隐式曲面<sup>[8]</sup>,一类是“水滴”或“元球”隐式曲面(blobby or meatball surfaces);另一类是代数隐式曲面(algebraic surfaces)。Franke 等人证明了径向基函数(radial basis function, RBF)能精确解决散乱点曲面插值(曲面重建)问题<sup>[9]</sup>。运用 RBF 建立的隐式曲面方程易于表示具有任意拓扑的复杂实体,近年来在计算机辅助几何设计、计算机图形学等领域得到了广泛的应用<sup>[10-13]</sup>。为解决求解曲面方程系数方程组效率低的问题,Wendland 构造了一类正定对称的 RBF<sup>[14]</sup>,称作 CSRBF;Kojekine 等人提出了一种运用 CSRBF 进行曲面重建时,将稀疏矩阵转变为带对角对称稀疏矩阵的数据存储方法<sup>[15]</sup>。

给定  $R^3$  空间的  $n$  个散乱点  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}(i=1,2,\dots,n)$  及其对应的约束值  $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ ,如果可以构造一个函数  $f(r)$ ,对每一个散乱点都能满足  $f(c_i) = h_i$ ,则由这些散乱点可以定义一个隐式曲面方程  $f(r) = 0$ 。使用 RBF 建立的隐式曲面方程可表示为

$$f(r) = \sum_{j=1}^n w_j \varphi(r - c_j) + P(r) = 0 \quad (3)$$

式中,  $r$  表示生成的曲面上的任意点,  $r = (x, y, z)$ ;  $c_j$  表示定义该方程的散乱点,  $c_j = (c_j^x, c_j^y, c_j^z)$ ;  $w_j$  表示对应于每一个散乱点的实数权值;  $P(r)$  是一个一阶多项式,对任意一点  $r, P(r)$  的形式为  $P(r) = p_0 + p_1x + p_2y + p_3z, p_0, p_1, p_2$  及  $p_3$  为多项式的实数系数。 $\varphi(r - c_j)$  是 RBF,一般而言,在 3 维空间进行散乱点插值时常采用的 RBF 形式为  $\varphi(r) = |r|^3$ 。

为求解权值  $w_j$  和多项式  $P(r)$  的系数  $p_0, p_1, p_2$  及  $p_3$ ,对每一个散乱点  $c_j = (c_j^x, c_j^y, c_j^z)$ ,要求满足插值约束条件

$$f(c_i) = \sum_{j=1}^n w_j \varphi(c_i - c_j) + P(c_i) = h_i \quad (4)$$

和正交条件

$$\sum_{j=1}^n w_j = \sum_{j=1}^n w_j c_j^x = \sum_{j=1}^n w_j c_j^y = \sum_{j=1}^n w_j c_j^z = 0 \quad (5)$$

令  $\varphi_{ij} = \varphi(c_i - c_j)$ , 由式(4)、式(5)可得线性方程组

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} & 1 & c_1^x & c_1^y & c_1^z \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} & 1 & c_2^x & c_2^y & c_2^z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} & 1 & c_n^x & c_n^y & c_n^z \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1^x & c_2^x & \cdots & c_n^x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1^y & c_2^y & \cdots & c_n^y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1^z & c_2^z & \cdots & c_n^z & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \\ p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)左边的矩阵是半正定的,因而存在唯一的一组解  $(w_1, w_2, \dots, w_n, p_0, p_1, p_2, p_3)$ , 将求得的结果代入式(3), 就可以得到隐式曲面方程

$$f(x, y, z) = \sum_{j=1}^n w_j (\sqrt{(x - c_j^x)^2 + (y - c_j^y)^2 + (z - c_j^z)^2})^3 + p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z = 0 \quad (7)$$

使用 RBF 建立隐式曲面方程, 如果被插值的散乱点数量较多时, 求解系数方程式(6)的运算量较大, 造成求解时间过长。为此, Wendland<sup>[14]</sup>构造了 CSRBF, 其基本形式为

$$\varphi(R) = \begin{cases} \varphi(R) & 0 \leq R < 1 \\ 0 & R \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

对于 3 维空间, 式中

$$R = \frac{\sqrt{(c_j^x - c_0^x)^2 + (c_j^y - c_0^y)^2 + (c_j^z - c_0^z)^2}}{R_0}$$

$R_0$  为 CSRBF 的支撑半径, 当散乱点  $(c_j^x, c_j^y, c_j^z)$  距离中心点  $(c_0^x, c_0^y, c_0^z)$  的距离大于  $R_0$  时, RBF 的值等于 0。

由式(4)和式(8)可知, 当  $c_i$  与  $c_j$  的距离大于支撑半径  $R_0$  时,  $\varphi(c_i - c_j) = 0$ , 这样, 式(6)的系数矩阵就是一个稀疏矩阵, 运用文献[15]提出的将稀疏矩阵转变为带对角对称稀疏矩阵的八叉树数据存储方法, 即对散乱点进行空间划分, 利用划分的结果对每个散乱点找到其支撑半径范围内的相邻散乱点, 一定程度上解决了 RBF 的存储和计算消耗过大的问题。

对式(8)中  $0 \leq R < 1$  时的情况, 文献[14]给出了不同连续性  $C^k$  和维数  $D$  时  $\varphi(R)$  的各种形式, 本

文采用的 CSRBF 形式为  $\varphi(R) = (1 - R)^2$ , 并运用八叉树数据存储方法, 建立简化后点集的隐式曲面方程, 实现曲面重建; 然后使用 MC (marching cubes, 步进立方体) 算法生成隐式曲面的三角网格模型, 实现隐式曲面重建后的显示。

### 4 误差分析

利用求解出的简化后点集的隐式曲面方程式(7), 将原始测量数据点集中各个点的 3 维坐标  $(x, y, z)$  代入  $\sum_{j=1}^n w_j (\sqrt{(x - c_j^x)^2 + (y - c_j^y)^2 + (z - c_j^z)^2})^3 + p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z$  中, 如果求得的值  $f(x, y, z)$  不全为 0, 则表明重建曲面存在误差, 本文用最大误差和均方根误差作为描述重建曲面误差的指标, 从而评价重建曲面的精度质量。原始测量数据点集中各点的  $f(x, y, z)$  值的最大值即为重建曲面的最大误差, 均方根误差  $s$  按下式计算:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (f(x_i, y_i, z_i) - \bar{f}(x, y, z))^2} \quad (9)$$

其中,  $f(x_i, y_i, z_i)$  表示测量点集的重建曲面在任一测量点  $(x_i, y_i, z_i)$  处的误差,  $\bar{f}(x, y, z)$  表示测量点集的重建曲面在所有测量点处的平均误差,  $n$  表示测量点数目。

### 5 实验结果

对实际测量得到的 144 010 个数据点的牙模型和 56 000 个数据点的佛模型, 在主频 2.6 GHz、内存 256MB 的 Pentium IV 计算机上分别实现了本文的测量点集简化算法, 利用 CSRBF 建立了简化后点集的隐式曲面方程, 并运用 MC 算法生成隐式曲面的三角网格模型, 实现了模型的光照显示。图 1 为将牙模型原始测量数据简化的示意图, 图 2 为将佛模型原始测量数据简化的示意图。简化测量点集的具体参数和时间如表 1 所示, 利用 CSRBF 建立简化后点集的隐式曲面方程的求解时间和重建曲面的误差分析结果如表 2 所示。出于比较的目的, 本文也实现了文献[5]、[6]中基于 MLS 的数据简化算法和文献[1]中按给定数据点个数简化数据的准则, 并将简化点集需要的时间和重建曲面的误差分析结果也列于了相应的表中。

通过对以上两个实例的分析比较可以看出, 虽

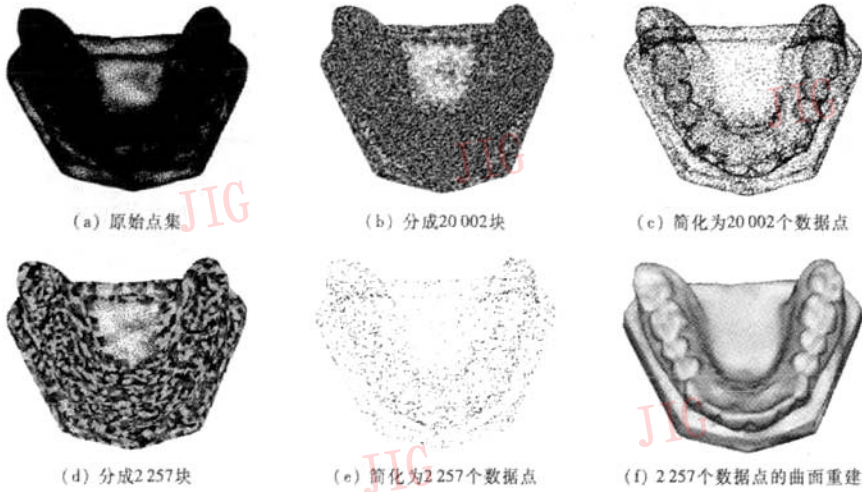


图 1 牙模型原始测量点集简化及重建

Fig. 1 The simplification and reconstruction of the original measuring point-sets of the tooth model

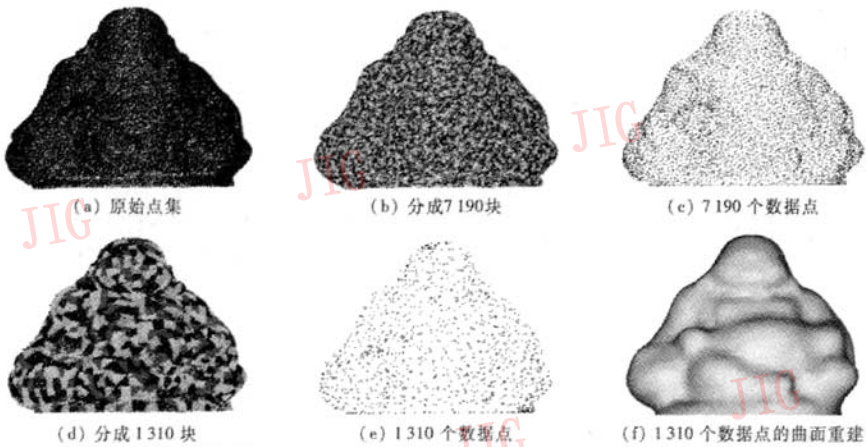


图 2 佛模型原始测量点集简化及重建

Fig. 2 The simplification and reconstruction of the original measuring point-sets of the Buddha model

表 1 测量数据点集简化及其隐式曲面方程求解的各种参数

Tab. 1 The various parameters of the simplification and the solution of the implicit surface equation of the measuring point-sets

模型	原始点集数	简化后的点数 (点集分块数)	$\alpha$	$n$	点集分块时间 (s)	本文方法点集 简化时间(s)	MLS 方法点集 简化时间(s)	按给定数据点 个数的方法简化 点集的时间(s)
牙	144 010	20 002	0.1	10	31.641	1.969	45.598	15
		2 257	0.1	95	27.000	0.422	1.915	21
佛	56 000	7 190	0.1	12	6.649	0.219	1.777	12
		1 310	0.1	70	4.578	0.094	7.076	18

然对本文简化算法得到的点集进行模型重建时,重建后的曲面误差较基于 MLS 简化算法得到的点集

的重建曲面误差略大,但是本文的测量点集简化算法运行时间较短,效率较基于 MLS 的简化算法高很

表 2 隐式曲面方程求解时间和重建误差分析结果

Tab. 2 The solving time of the implicit surface equation and the error analytic results of the reconstructed implicit surface

模型	数据点数	支撑半径	方程求解时间(s)	最大误差			均方根误差		
				本文简化	MLS 简化	按给定数据点	本文简化	MLS 简化	按给定数据点
				算法	算法	个数简化算法	算法	算法	个数简化算法
牙	2257	0.2	485.771	2.9519	2.7365	2.8341	0.5187	0.4065	0.6124
佛	1310	0.2	337.613	0.4736	0.3846	0.5623	0.0435	0.0401	0.0676

多;与按给定数据点个数简化数据的准则相比,本文的简化算法运行时间(点集分块时间与点集简化时间的和)较长,但是重建后的曲面误差却较按给定数据点个数简化数据的算法得到的点集的重建曲面误差小。所以,综合考虑效率和精度两方面因素,本文提出的简化算法不失为一种较好的方法。在实际工程应用中,根据重建后的曲面误差分析结果,在满足曲面重建精度要求的前提下,运用本文的测量点集简化方法,可以提高重建效率,在一定的误差控制范围内快速实现还原已有实物模型。

## 6 结 论

首先根据表面变化系数及测量数据的点数递归地将测量点集分成若干子集,在每个子集内保留一个与该子集重心点最近的点,实现了测量点集的快速简化;然后利用 CSRBF 建立了简化后点集的隐式曲面方程,对重建曲面误差进行了分析。实例证明,本文提出的测量点集的简化算法运行效率较高、效果良好,重建后的曲面误差分析为实现在一定的误差控制范围内简化测量数据点集提供了依据。实现基于 CSRBF 的曲面重建误差的闭环控制是今后研究工作的努力目标。

### 参考文献 (References)

- Zhang Li-yan, Zhou Ru-rong, Cai Wei-bin, et al. Research on cloud data simplification [J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2001, 13(11): 1119 ~ 1023. [张丽艳, 周儒荣, 蔡伟斌等. 海量测量数据简化技术研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(11): 1119 ~ 1023.]
- Weir D J, Milroy M, Bradley C, et al. Reverse engineering physical models employing wrap around B-spline surfaces and quadrics [J]. Journal of Engineering Manufacture-Part B, 1996, 210: 147 ~ 157.
- Sun W, Bradley C, Zhang Y F, et al. Cloud data modeling employing a unified, non-redundant triangular mesh [J]. Computer Aided Design, 2001, 33(1): 183 ~ 93.
- Liu G H, Wong Y S, Zhang Y F, et al. Error-based segmentation of cloud data for direct rapid prototyping [J]. Computer Aided Design, 2002, 35(7): 633 ~ 645.
- Pauly M, Gross M, Kobbelt L P. Efficient simplification of point-sampled surfaces [A]. In: Proceedings of the Conference on Visualization [C], Boston, Massachusetts, USA, 2002: 163 ~ 170.
- Mederos B, Velho L, De Figueiredo L H. Moving least squares multiresolution surface approximation [A]. In: Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing [C], São Carlos, SP Brazil, 2003, 16: 19 ~ 24.
- Alexa M, Behr J, Cohen-Or D, et al. Point set surface [A]. IEEE Visualization 2001 [C], San Diego, California, USA, 2001: 21 ~ 28.
- Turk G, O'Brien J F. Variational implicit surfaces [R]. GIT-CVU-99-15, Georgia, USA: Georgia Institute of Technology, 1998.
- Franke R. Scattered data interpolation: tests of some methods [J]. Mathematics of Computation, 1982, 38(157): 181 ~ 200.
- Dinh H Q, Turk G, Slabaugh G. Reconstructing surfaces by volumetric regularization using radial basis functions [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(10): 1358 ~ 1371.
- Carr J C, Beatson R K, Cherie J B, et al. Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions [A]. In: Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques [C], New York, 2001: 67 ~ 76.
- Laga H, Piperakis R, Takahashi H, et al. 3D object reconstruction from scanned data using radial basis functions and volumetric processing [A]. In: Nicograph 2002 National Conference [C], Nagoya, Japan, 2002: 133 ~ 138.
- Reuter P, Tobor I, Schlick C, et al. Point-based modeling and rendering using radial basis functions [A]. In: Proceedings of the 1st International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and South East Asia [C], Melbourne, Australia, 2003: 111 ~ 117.
- Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree [J]. Advances in Computational Mathematics (AICM), 1995, 4(1): 389 ~ 396.
- Kojekine N, Hagiwara I, Savchenko V. Software tools using CSRBFs for processing scattered data [J]. Computers & Graphics, 2003, 27(2): 311 ~ 319.